

1	2	3	4	5	Σ
					/ 25

Solution Sheet 6: Functions & Countability

Exercise 1: Function Properties (Natural Numbers)

Task 1

(5 Points)

Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$. Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Solution:

Injektiv: Ja. Surjektiv: Nein (0 nicht erreicht). Bijektiv: Nein.

Exercise 2: Countability of Rational Pairs

Task 2

(5 Points)

Beweise, dass die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten ($\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$) abzählbar ist.

Solution:

Verwende Countability Procedure: Da $\mathbb{Q}$ countable, ist $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ countable (Theorem 3.22). Explizit: Finde Injektion $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$. Identifiziere $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ via Brüche, dann $f((p, q)) = 2^{|p|}3^{|q|}$ (FTA-Trick). Bijektion möglich via Pairing.

Exercise 3: Uncountability Proof

Task 3

(5 Points)

Beweise, dass für $\ell \geq 1$, $A_\ell = \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \mid \sum_{i=0}^k f(i) \leq \frac{k}{\ell} + 1 \text{ für alle } k \right\}$ uncountable ist.

Solution:

4-Step Uncountability Pattern:

1. **Injektion finden:** Definiere $h_\ell : \{0, 1\}^\infty \rightarrow A_\ell$, $(h_{\ell(b)})(n) = b(k)$ falls $n = k \cdot \ell$, sonst 0. **Tipp:** Stelle dir vor: Die Folge b wird in die Positionen $0, \ell, 2\ell, \dots$ eingesetzt, der Rest ist 0. Wie b in große Lücken zu platzieren.
2. **Funktion verifizieren:** Prüfe die Summenbedingung: Für $k = \ell \cdot k' + r$, $\text{Summe} \leq k' + 1 \leq \left\lfloor \frac{k}{\ell} \right\rfloor + 1 \leq \frac{k}{\ell} + 1$. Also $h_{\ell(b)} \in A_\ell$.
3. **Injektivität beweisen:** Wenn $h_{\ell(b)} = h_{\ell(c)}$, dann $b(k) = (h_{\ell(b)})(\ell k) = c(k)$. Also $b = c$. **Tipp:** Die Werte an den Vielfachen von ℓ bestimmen b eindeutig.
4. **Schluss:** $\{0, 1\}^\infty \preceq A_\ell$ via h_ℓ . Da $\{0, 1\}^\infty$ uncountable, ist A_ℓ uncountable. **Tipp:** Wie beim Diagonalargument: Zu viele Folgen, um aufzuzählen.

Exercise 4: Cardinality and Equivalence Relations**Task 4**

(5 Points)

Sei A uncountable, θ Equivalenzrelation auf A . Beweise, dass $\frac{A}{\theta}$ oder $[a]_{\theta}$ für ein a uncountable ist.

Solution:

Annahme Widerspruch: $\frac{A}{\theta}$ countable, $[a]_{\theta}$ countable für alle a . Dann $A = \cup [a_i]_{\theta}$ (countable Union countable Mengen, Theorem 3.22), contradiction. Also mindestens eines uncountable.

Exercise 5: Uncountability of Subset Task 5

(5 Points)

Beweise, dass $A = \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid f(k) = 0 \text{ falls } k \equiv 0 \pmod{2}\}$ uncountable ist.

Solution:

4-Step Uncountability Pattern:

1. **Injektion:** $f : \{0, 1\}^{\infty} \rightarrow A$, $g(k) = 0$ falls k gerade, sonst $b_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$.
2. **Funktion:** $g \in A$ (gerade $k = 0$).
3. **Injektiv:** Falls $b \neq b'$, differieren bei j , dann $g(2j+1) = b_j \neq b'_j$.
4. **Schluss:** $\{0, 1\}^{\infty} \preceq A$, uncountable.