

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
								/ 40

Exercise Sheet 9: Algebraic Structures (Deep Dive)

Exercise 1.1: Generatoren & Zyklizität

Task 1

(5 Points)

Frage:

- Finde alle Generatoren der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_{10}, \oplus)$.
- Ist die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}_{12}^*, \otimes)$ zyklisch? Begründe deine Antwort.

Exercise 1.2: Anwendung von Eulers Satz

Task 2

(5 Points)

Frage:

Berechne $3^{2023} \bmod 100$.

Exercise 1.3: RSA Secret Key (Exam HS18)

Task 3

(5 Points)

Frage:

Der öffentliche RSA-Schlüssel von Alice ist $(n, e) = (77, 7)$. Berechne ihren geheimen Schlüssel d .

Exercise 1.4: Isomorphismus (Exam HS22)

Task 4

(5 Points)

Frage:

Beweise oder widerlege: Die Gruppen $(\mathbb{Z}_{12}^*, \otimes)$ und $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ sind isomorph.

Exercise 2.1: Einheiten & Nullteiler (Exam HS18)

Task 5

(5 Points)

Frage:

Finde alle Einheiten und alle Nullteiler im Ring $\mathbb{Z}_{12}$.

Exercise 2.2: Ringaxiome (Exam HS20)

Task 6

(5 Points)

Frage:

Sei $\langle R; +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ ein Ring. Beweise nur mit den Ringaxiomen, dass für alle $a, b \in R$ gilt: $(-a)b = -(ab)$
(Hinweis: $-(ab)$ ist das additive Inverse von ab . Du musst zeigen, dass $(-a)b + ab = 0$.)

Exercise 2.3: Ringeigenschaften (Exam HS19)

Task 7

(5 Points)

Frage:

Sei $\langle R; +, \cdot \rangle$ ein Ring, in dem für alle $a \in R$ gilt: $a \cdot a = a$. Beweise, dass der Ring kommutativ ist (d.h. $ab = ba$ für alle $a, b \in R$).

Tipp: Zeige zuerst, dass $a + a = 0$ für alle $a \in R$ gilt.

Exercise 2.4: Endliche Integritätsbereiche

Task 8

(5 Points)

Frage:

Beweise den Satz: Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper.