

1	2	3	4	5	Σ
					/ 25

Exercise Sheet 6: Functions & Countability

Exercise 1: Function Properties (Natural Numbers)

Task 1

(5 Points)

Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$. Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Exercise 2: Countability of Rational Pairs**Task 2**

(5 Points)

Beweise, dass die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten ($\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$) abzählbar ist.

Exercise 3: Uncountability Proof**Task 3**

(5 Points)

Beweise, dass für $\ell \geq 1$, $A_\ell = \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \mid \sum_{i=0}^k f(i) \leq \frac{k}{\ell} + 1 \text{ für alle } k \right\}$ uncountable ist.

Exercise 4: Cardinality and Equivalence Relations**Task 4**

(5 Points)

Sei A uncountable, θ Equivalenzrelation auf A . Beweise, dass $\frac{A}{\theta}$ oder $[a]_{\theta}$ für ein a uncountable ist.

Exercise 5: Uncountability of Subset**Task 5**

(5 Points)

Beweise, dass $A = \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid f(k) = 0 \text{ falls } k \equiv 0 \pmod{2}\}$ uncountable ist.