Diskrete Mathematik

Woche 5

Shivram Sambhus (cs.shivi.io)

ETH Zurich

Heutige Agenda

1. **Admin & Organisatorisches**
2. **Rückblick auf die letzte Serie**
3. **Wiederholung: Herangehensweisen an Beweise**
4. **Hauptthema 1: Relationen**
   - Definitionen & Eigenschaften
   - Komposition & transitive Hülle
5. **Übungsteil 1: Eigenschaften von Relationen**
6. **Hauptthema 2: Spezielle Relationen**
   - Äquivalenzrelationen
   - Partielle Ordnungen (Posets)
7. **Übungsteil 2: Äquivalenzrelationen & Posets**
8. **Vorschau & Tipps**

Admin & Organisatorisches

- **Korrekturen:** Es fehlen noch einige Korrekturen, aber sie sollten in den nächsten Tagen bei euch eintreffen.
- **Typischer Fehler in der letzten Serie:**
  - **Problem:** Wenn eine **Interpretation** gegeben ist (z.B. Universum $\mathbb{Z}$, Prädikat $E(x)$), dann ist ein Ausdruck wie $E(4)$ eine **Aussage** (hier: wahr). Man kann dann nicht einfach Variablen $A, B, \ldots$ für diese Aussagen einführen und eine Wahrheitstabelle erstellen.
  - **Warum?** Die Wahrheitstabelle prüft alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten. Wenn aber die Interpretation fix ist, sind auch die Wahrheitswerte der Aussagen fix.
  - **Lösung:** Man muss direkt mit den Aussagen und den Regeln der Prädikatenlogik argumentieren.

Recap: Herangehensweisen an Beweise

Unterschiedliche Kapitel → unterschiedliche Werkzeuge!

- **Kapitel 2 (Aussagenlogik):**
  - **Problem:** $F_1 \equiv F_2$ oder $F_1 \models F_2$.
  - **Keine Interpretation gegeben!** Die Formeln sind "dynamisch".
  - **Var 1:** $F_1 \equiv F_2$ (...), $F_2 \equiv F_3$ (...), $F_3 \models F_4$ (...).
  - **Var 2:** $F_1 \models F_2$ (...), $\Leftrightarrow F_{1.1} \models F_2$ (...), $\Leftrightarrow$ ...
  - **Var 3:** Weil wir keine Interpretation haben: Wahrheitstabelle.
- **Kapitel 3 (Mengenlehre):**
  - **Problem:** $A = B$ oder $A \subseteq B$.
  - **Interpretation ist gegeben** (das Universum der Mengen).
  - **Var 1 (Falsch, weil nicht richtig definiert, für "="):** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  - **Var 2 (Richtig, meistens der richtige Ansatz):** Für beliebiges x: $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (...), $\Leftrightarrow$ ...
  - **Var 3 (Var 2 + Fallunterscheidung):** Serie Bonus... Part 3.
  - **Generell kommen in Ch3 keine $\models$ oder $\equiv$ vor, weil die Interpretation vorgegeben ist!**

Hauptthema 1: Relationen - Theorie

Was ist eine Relation?

- **Formale Definition:** Eine (binäre) Relation ρ von einer Menge A zu einer Menge B ist eine Teilmenge des Kartesischen Produkts $A \times B$.

$$\rho \subseteq A \times B$$

- **Intuitive Notation:** Statt $(a, b) \in \rho$ schreiben wir oft $a\rho b$.
- **Beispiel:** Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Die "kleiner als"-Relation $<$ ist die Menge $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, was eine Teilmenge von $A \times A$ ist.

Eigenschaften von Relationen (auf einer Menge A)

- **Reflexiv:** Jedes Element steht in Relation zu sich selbst.
  - $\forall a \in A : a\rho a$.
  - **Beispiel:** $\leq$ auf $\mathbb{Z}$.
- **Irreflexiv:** Kein Element steht in Relation zu sich selbst.
  - $\forall a \in A : \neg(a\rho a)$.
  - **Beispiel:** $<$ auf $\mathbb{Z}$.
- **Symmetrisch:** Wenn a in Relation zu b steht, dann auch b zu a.
  - $\forall a, b \in A : a\rho b \to b\rho a$.
  - **Beispiel:** Die “ist verheiratet mit”-Relation.

Eigenschaften von Relationen (auf einer Menge A)

- **Antisymmetrisch:** Wenn a zu b und b zu a in Relation stehen, müssen sie identisch sein.
  - $\forall a, b \in A : (a\rho b \wedge b\rho a) \rightarrow a = b$.
  - **Beispiel:** $\leq$ auf $\mathbb{Z}$.
- **Asymmetrisch:** Wenn a in Relation zu b steht, dann kann b **nicht** in Relation zu a stehen.
  - $\forall a, b \in A : a\rho b \rightarrow \neg(b\rho a)$.
  - **Beispiel:** $<$ auf $\mathbb{Z}$.
- **Transitiv:** Eine Relation ist "abkürzbar".
  - $\forall a, b, c \in A : (a\rho b \wedge b\rho c) \rightarrow a\rho c$.
  - **Beispiel:** Die "ist Vorfahre von"-Relation.

Komposition von Relationen

- **Idee:** Wenn wir eine Relation ρ von A nach B und eine Relation σ von B nach C haben, können wir sie verketten.
- **Definition ($\rho \circ \sigma$):** Die Komposition ist eine Relation von A nach C.

$$\rho \circ \sigma := \{(a, c) \mid \exists b \in B : (a\rho b \wedge b\sigma c)\}$$

- **Beweis von Lemma 3.8 ($\widetilde{\rho \circ \sigma} = \tilde{\sigma} \circ \tilde{\rho}$):**

$$\begin{aligned}
a(\widetilde{\rho \circ \sigma})c &\iff c(\rho \circ \sigma)a && \text{(Def. Inverse)} \\
&\iff \exists b : (c\rho b \wedge b\sigma a) && \text{(Def. Komposition)} \\
&\iff \exists b : (b\tilde{\rho}c \wedge a\tilde{\sigma}b) && \text{(Def. Inverse, zweimal)} \\
&\iff a(\tilde{\sigma} \circ \tilde{\rho})c && \text{(Def. Komposition)}
\end{aligned}$$

- **Visualisierung mit Matrizen:** Die Komposition von Relationen entspricht der (booleschen) Matrizenmultiplikation. Die Inverse entspricht der Transponierten.

Eigenschaften der Komposition

- **Assoziativ:** Ja.
- **Kommutativ:** Nein!
- **Identität:** Die Identitätsrelation id wirkt als neutrales Element.

Transitive Hülle (ρ^*): Die "unendliche" Vereinigung aller Kompositionen von ρ mit sich selbst. Intuitiv: $a\rho^*b$ bedeutet, es gibt einen Pfad von a nach b.

Übungsteil 1: Eigenschaften von Relationen

Übung 1: Eigenschaften bestimmen (4 Min)

Sei A die Menge aller Menschen. Bestimme für jede der folgenden Relationen, welche der sechs Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv) sie erfüllt.

a) ρ_1: "a ist älter als b."
b) ρ_2: "a und b haben denselben Geburtstag."
c) ρ_3: "a hat b schon einmal getroffen."

Lösung 1

a) ρ_1 **("älter als"):**
   - **Irreflexiv:** Ja (niemand ist älter als sich selbst).
   - **Asymmetrisch:** Ja (wenn a älter als b, kann b nicht älter als a sein).
   - **Transitiv:** Ja (wenn a älter als b und b älter als c, ist a älter als c).
   - Nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch.

b) ρ_2 **("selber Geburtstag"):**
   - **Reflexiv:** Ja.
   - **Symmetrisch:** Ja.
   - **Transitiv:** Ja.

c) ρ_3 **("hat getroffen"):**
   - **Symmetrisch:** Ja (wenn a b getroffen hat, hat auch b a getroffen).
   - **Reflexiv?** Diskutabel. Kann man sich selbst "treffen"? Nehmen wir für die Mathematik meist an: Ja.
   - **Transitiv?** Nein. Wenn a b trifft und b c trifft, heisst das nicht, dass a c getroffen hat.
   - Keine der anderen Eigenschaften.

Übung 2: Beweis einer Eigenschaft (5 Min)

Sei ρ eine Relation auf einer Menge A. **Behauptung:** Wenn ρ transitiv ist, dann ist auch die inverse Relation $\tilde{\rho}$ transitiv.

Beweise diese Aussage formal.

Lösung 2

1. **Annahmen:**
   - ρ ist transitiv, d.h. $\forall x, y, z : (x\rho y \wedge y\rho z) \rightarrow x\rho z$.
2. **Zu beweisen:**
   - $\tilde{\rho}$ ist transitiv, d.h. $\forall a, b, c : (a\tilde{\rho}b \wedge b\tilde{\rho}c) \rightarrow a\tilde{\rho}c$.
3. **Beweis:**
   - Seien a, b, c beliebige Elemente aus A.
   - Nehmen wir an, die Prämisse $a\tilde{\rho}b \wedge b\tilde{\rho}c$ ist wahr.
   - Per Definition der inversen Relation bedeutet das:
     - $b\rho a$
     - $c\rho b$
   - Wir können die Reihenfolge tauschen: $c\rho b \wedge b\rho a$.
   - Da ρ transitiv ist (unsere Annahme), können wir folgern: $c\rho a$.
   - Wenden wir wieder die Definition der inversen Relation an: $a\tilde{\rho}c$.
   - Dies ist genau unsere Konklusion. q.e.d.

Übung 3: Relationenpotenz (aus HS22) (3 Min)

Sei $\rho = \{(a,b),(a,c),(b,a)\}$ auf $\{a,b,c\}$. Bestimme alle Elemente von ρ^3.

Lösung 3

Die Elemente sind: (a, b), (a, c), (b, a).

(Beachte: ρ^3 ist die transitive Hülle für Pfade der Länge 3, aber hier ist es die Komposition dreimal.)

Hauptthema 2: Spezielle Relationen

Äquivalenzrelationen

- **Definition:** Eine Relation, die **reflexiv, symmetrisch und transitiv** ist.
- **Intuition:** Sie formalisiert das Konzept der "Gleichartigkeit". Elemente werden in Gruppen (Äquivalenzklassen) eingeteilt.
- **Äquivalenzklasse ($[a]$):** Die Menge aller Elemente, die zu a äquivalent sind.

$$[a] := \{b \in A \mid a \sim b\}$$

- **Partition & Quotientenmenge:** Die Menge aller Äquivalenzklassen bildet eine Partition der Grundmenge (disjunkte Zerlegung). Diese Menge nennt man Quotientenmenge $A/\sim$.

Beispiel: Definition der Rationalen Zahlen

Behauptung: Die Relation $\sim$ auf $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ mit $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Reflexivität

- $(a, b) \sim (a, b) \iff ab = ba$ (Definition von $\sim$).
- $\iff ab = ab$ (Kommutativität der Multiplikation).
- Wahr.

Beweis: Symmetrie

- **Annahme:** $(a, b) \sim (c, d)$, also $ad = bc$.
- **Zu zeigen:** $(c, d) \sim (a, b)$, also $cb = da$.
- Aus $ad = bc$ folgt durch Umstellen $bc = ad$, also $cb = da$.
- Wahr.

Beweis: Transitivität

- **Annahme:** $(a,b) \sim (c,d)$ (also $ad = bc$) und $(c,d) \sim (e,f)$ (also $cf = de$).
- **Zu zeigen:** $(a,b) \sim (e,f)$, also $af = be$.
- Multipliziere die Annahmen: $ad \cdot cf = bc \cdot de \Rightarrow adcf = bcde$.
- Da $d \neq 0$, können wir durch d teilen: $acf = bce$.

Beweis: Transitivität (Fortsetzung)

- **Fallunterscheidung:**
  - **Fall 1:** $c \neq 0$. Teile durch c: $af = be$. Fertig.
  - **Fall 2:** $c = 0$. Aus $ad = bc$ folgt $ad = 0$. Da $d \neq 0$, muss $a = 0$ sein. Aus $cf = de$ folgt $0 = de$. Da $d \neq 0$, muss $e = 0$ sein. Dann $af = 0$ und $be = 0$, also $af = be$.
- In beiden Fällen gilt die Konklusion.

Partielle Ordnungen (Posets)

- **Definition:** Eine Relation $\preceq$, die **reflexiv, antisymmetrisch und transitiv** ist.
- **Intuition:** Verallgemeinert das Konzept von “kleiner-gleich” ($\leq$). Nicht alle Elemente müssen vergleichbar sein.
- **Strikte Ordnung ($\prec$):** $a \prec b \iff (a \preceq b \land a \neq b)$.

Beispiel: Transitivität von $\prec$

Beweis:

- **Annahme:**
  - $a \prec b$
  - $b \prec c$
- **Zu zeigen:** $a \prec c$, d.h. $a \preceq c$ und $a \neq c$.

Beweis: Teil 1 - $a \preceq c$

- Aus $a \prec b$ folgt $a \preceq b$.
- Aus $b \prec c$ folgt $b \preceq c$.
- Wegen Transitivität von $\preceq$: $a \preceq b$ und $b \preceq c$ impliziert $a \preceq c$.

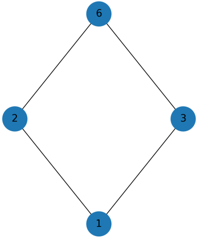
Beweis: Teil 2 - $a \neq c$

- Annahme zum Widerspruch: $a = c$.
- Dann: $a \prec b$ und $b \prec a$ (da $a = c$).
- Das bedeutet: $a \preceq b$ und $b \preceq a$.
- Wegen Antisymmetrie von $\preceq$: $a \preceq b$ und $b \preceq a$ impliziert $a = b$.
- Aber $a \prec b$ impliziert $a \neq b$. Widerspruch.
- **Schluss:** $\prec$ ist transitiv.

Hasse-Diagramme

- **Hasse-Diagramm:** Eine vereinfachte grafische Darstellung eines (endlichen) Posets.
- Kanten nur zwischen Elementen, die sich überdecken ("direkt grösser sind").
- Pfeile zeigen implizit nach oben.
- **Beispiel:** Teilerrelation auf $\{1, 2, 3, 6\}$.

Hasse diagram of divisibility on {1,2,3,6}



Spezielle Elemente in Posets

Sei $(A, \preceq)$ ein Poset, $S \subseteq A$ eine Teilmenge.

- **Minimal/Maximal Elemente:**
  - $a \in A$ ist **minimal**, wenn kein $b \in A$ mit $b \prec a$.
  - $a \in A$ ist **maximal**, wenn kein $b \in A$ mit $a \prec b$.
- **Kleinstes/Grösstes Element:**
  - $a \in A$ ist das **kleinste**, wenn $a \preceq b$ für alle $b \in A$.
  - $a \in A$ ist das **grösste**, wenn $b \preceq a$ für alle $b \in A$.
- **Untere/Obere Schranken von S:**
  - $a \in A$ ist **untere Schranke** von S, wenn $a \preceq b$ für alle $b \in S$.
  - $a \in A$ ist **obere Schranke** von S, wenn $b \preceq a$ für alle $b \in S$.
- **Infimum/Supremum von S:**
  - Das **Infimum** (grösste untere Schranke) ist das grösste Element der unteren Schranken.
  - Das **Supremum** (kleinste obere Schranke) ist das kleinste Element der oberen Schranken.

Beispiel: Spezielle Elemente

Betrachte das Poset $(A, \preceq)$ mit $A = \{2, 3, 6\}$ und
$a \preceq b \iff a \mid b$.

- **Minimale/Maximale Elemente in A:**
  - Minimal: 2 und 3 (keine kleineren Elemente).
  - Maximal: 6 (kein grösseres Element).
  - Kleinstes: Keines (2 und 3 sind unvergleichbar).
  - Grösstes: 6.

Sei $S = \{2, 3\} \subseteq A$.

- **Untere/Obere Schranken von S:**
  - Untere Schranken: Keine (nichts teilt sowohl 2 als auch 3).
  - Obere Schranken: 6.
- **Infimum/Supremum von S:**
  - Infimum: Keines.
  - Supremum: 6.

Meet, Join und Verbände

- **Meet ($\wedge$):** Das Infimum von zwei Elementen.
  - $a \wedge b := \inf\{a, b\}$.
  - Existiert, wenn a und b ein Infimum haben.
- **Join ($\vee$):** Das Supremum von zwei Elementen.
  - $a \vee b := \sup\{a, b\}$.
  - Existiert, wenn a und b ein Supremum haben.
- **Lattice (Verband):** Ein Poset, in dem jedes Paar von Elementen ein Meet und ein Join hat.

Beispiele: Meet, Join und Lattice

- **In** $(\mathbb{N}, |)$ **(Teilerrelation):**
  - Meet von 6 und 9: $\gcd(6, 9) = 3$.
  - Join von 6 und 9: $\operatorname{lcm}(6, 9) = 18$.
- **In** $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ **(Potenzmenge):**
  - Meet von $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$: $\{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\}$.
  - Join von $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$: $\{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$.
- **Dieses Poset ist ein Lattice.**

Produkt-Poset

Sei $(A, \preceq_A)$ und $(B, \preceq_B)$ Posets. Das **Produkt-Poset** ist $(A \times B, \preceq)$, wobei:

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 \preceq_A a_2 \land b_1 \preceq_B b_2$$

Beweis, dass es ein Poset ist:

- Reflexiv: $(a, b) \preceq (a, b)$ trivial.
- Antisymmetrisch: Wenn $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ und umgekehrt, dann $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.
- Transitiv: Folgt aus Transitivität der Komponenten.

Lexikografische Ordnung

Eine spezielle Ordnung auf $A \times B$: $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)$ falls $a_1 \prec_A a_2$ oder $(a_1 = a_2$ und $b_1 \prec_B b_2)$.

Beispiel: Wörterbuchordnung auf Strings.

Übungsteil 2: Äquivalenzrelationen & Posets

Übung 4: Äquivalenzrelation? (4 Min)

Sei $A = \mathbb{Z}$. Betrachte die Relation $a \sim b \iff a \cdot b \geq 0$. Ist dies eine Äquivalenzrelation? Begründe deine Antwort.

Lösung 4

Wir prüfen die drei Eigenschaften:

1. **Reflexivität:** $a \sim a \iff a \cdot a \geq 0 \iff a^2 \geq 0$.
   - Dies ist für alle ganzen Zahlen a **wahr**.
2. **Symmetrie:** $a \sim b \to b \sim a$.
   - Annahme: $a \sim b$, also $a \cdot b \geq 0$.
   - Wegen Kommutativität der Multiplikation ist $b \cdot a = a \cdot b \geq 0$.
   - Also gilt auch $b \sim a$. Die Relation ist **symmetrisch**.
3. **Transitivität:** $(a \sim b \wedge b \sim c) \to a \sim c$.
   - Wir suchen ein Gegenbeispiel.
   - Sei $a = 2$, $b = 0$, $c = -3$.
   - Prüfe Prämisse:
     - $a \sim b$: $2 \cdot 0 = 0 \geq 0$. (Wahr)
     - $b \sim c$: $0 \cdot (-3) = 0 \geq 0$. (Wahr)
   - Prüfe Konklusion:
     - $a \sim c$: $2 \cdot (-3) = -6$. Die Bedingung $-6 \geq 0$ ist **falsch**.
   - Die Relation ist **nicht transitiv**.

Fazit: Nein, es ist keine Äquivalenzrelation.

Übung 5: Elemente in einem Poset (4 Min)

Betrachte das Poset $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$. Sei $S = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.

Finde für die Teilmenge S:

a) Alle minimalen und maximalen Elemente.
b) Alle unteren und oberen Schranken.
c) Das Infimum (grösste untere Schranke) und das Supremum (kleinste obere Schranke).

Lösung 5a

Minimale/Maximale Elemente von S:

- $\{1\}$ ist **minimal**, da keine andere Menge in S eine echte Teilmenge davon ist.
- $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$ sind **maximal**, da sie in keiner anderen Menge aus S enthalten sind.

Lösung 5b

Untere/Obere Schranken von S:

- **Untere Schranken:** Mengen, die in allen Elementen von S enthalten sind.
  - $\emptyset \subseteq \{1\}$, $\emptyset \subseteq \{1,2\}$, $\emptyset \subseteq \{1,3\}$.
  - $\{1\} \subseteq \{1\}$, $\{1\} \subseteq \{1,2\}$, $\{1\} \subseteq \{1,3\}$.
  - Untere Schranken sind: $\emptyset, \{1\}$.
- **Obere Schranken:** Mengen, die alle Elemente von S enthalten.
  - $\{1,2,3\}$ enthält alle.
  - Obere Schranken sind: $\{1,2,3\}$.

Lösung 5c

Infimum und Supremum von S:

- **Infimum (grösste untere Schranke):** Die grösste Menge unter $\{\emptyset, \{1\}\}$ ist $\{1\}$.
- **Supremum (kleinste obere Schranke):** Die kleinste Menge unter $\{\{1, 2, 3\}\}$ ist $\{1, 2, 3\}$.

Lösung 5: Sanity Check

Meet und Join in diesem Poset entsprechen Schnitt- und Vereinigungsmenge.

- $\inf(S) = \{1\} \cap \{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\}$.
- $\sup(S) = \{1\} \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\}$.

Übung 6: Poset-Eigenschaften (aus HS22) (4 Min)

Betrachte die Relation $\preceq$ auf $\mathbb{N}^2$ definiert durch
$(a, b) \preceq (c, d) \iff a \leq c \land b \leq d$.

a) Zeige, dass $\preceq$ reflexiv ist.

b) Was ist das kleinste obere Schranke der Menge $\{(3, 8), (1, 4), (2, 9)\}$?

Lösung 6

a) $(a, b) \preceq (a, b)$ da $a \leq a$ und $b \leq b$.

b) $(3, 9)$, da $3 \leq 3$, $8 \leq 9$, $1 \leq 3$, $4 \leq 9$, $2 \leq 3$, $9 \leq 9$.

Vorschau auf nächste Woche

Thema: Funktionen, Abzählbarkeit und Kardinalität

- Funktionen als spezielle Relationen
- Injektivität, Surjektivität, Bijektivität
- Unterschied zwischen abzählbar und überabzählbar (Cantors Diagonalargument)

Tipps

- Lest das Skript sorgfältig. Die Definitionen von Relationen und ihren Eigenschaften sind fundamental.
- Macht so viele Übungen wie möglich. Die Abstraktion braucht Übung.
- Schaut euch die empfohlenen Videos auf meiner Webseite an. Visuelle Erklärungen (besonders für Hasse-Diagramme) sind hier sehr hilfreich.

DM K (🇨🇭 Swiss German)

WhatsApp group

Offene Fragen & Feedback

- Gibt es noch Fragen zu den heutigen Themen oder den Übungen?
- Habt ihr Feedback zur heutigen Übungsstunde? (https://forms.gle/LPrQfoZNsAHVeKoM9)
- Fragen? Schreibt mir eine E-Mail (dm@shivi.io) oder fragt auf WhatsApp/Discord!
- Alle Infos: https://dm.shivi.io/

Schöne Woche und bis nächsten Montag!

Appendix: Einführung in Funktionen

Was ist eine Funktion?

- **Definition:** Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine spezielle Relation, bei der jedes Element in A genau einem Element in B zugeordnet wird.
- **Domain (Definitionsbereich):** A.
- **Codomain (Zielbereich):** B.
- **Range (Wertebereich):** $\{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$.

Eigenschaften von Funktionen

- **Injektiv (injective):** Verschiedene Elemente in A werden auf verschiedene in B abgebildet.
  $\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$.
- **Surjektiv (surjective):** Jedes Element in B wird erreicht.
  $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$.
- **Bijektiv (bijective):** Injektiv und surjektiv. Hat eine Inverse $f^{-1} : B \to A$.

Komposition von Funktionen

- **Definition:** $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- **Assoziativ:** $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- **Identität:** $id_A \circ f = f = f \circ id_A$.

Inverse Funktion

- Nur bijektive Funktionen haben eine Inverse.
- $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, $(f \circ f^{-1})(b) = b$.