Diskrete Mathematik

Woche 4

Shivram Sambhus (cs.shivi.io)

ETH Zurich

Heutige Agenda

1. **Admin & Organisatorisches**
2. **Rückblick auf Serie 3**
   - Lösungsstrategie für Aufgabe 3.7 (Neue Beweismuster)
   - Nachbesprechung: Beweis der Irrationalität von $\sqrt{n}$
3. **Guide: Mengenlehre**
   - Von Definitionen zu Beweisen
4. **Übungsteil: Mengenlehre & Potenzmengen**
5. **Theorie: Kartesisches Produkt & Relationen**
6. **Vorschau & Tipps**

Admin & Organisatorisches

- **Korrekturen:** Ich konnte noch nicht alle eure Lösungen korrigieren, aber ihr werdet die Korrekturen diese Woche erhalten.

Raumsituation

- Wie ihr wisst, war der Raum letztes Mal überfüllt. Ich habe versucht, einen grösseren Raum zu bekommen, aber die Head-TAs sind im Moment dagegen, da ein Teil der Leute in meiner offiziellen Gruppe kleinere Gruppen bevorzugt.
  - **Meine Lösung ab nächstes mal:** Die ersten ein bis zwei Reihen in diesem Raum sind für Personen reserviert, die offiziell in meiner Gruppe sind. Die anderen Plätze sind frei.
  - **Falls es wieder eng wird:** Wenn auch dieser Raum überfüllt ist und viele von euch wirklich einen grösseren Raum bevorzugen, wäre es am besten, wenn ihr den Professor persönlich oder per E-Mail darum bittet. Ich werde natürlich auch mit ihm und den Head TAs sprechen, wenn dieser Raum zu einem Problem wird.

Rückblick: Serie 3 - Aufgabe 3.7 (Neue Beweismuster)

Kernfrage: Ist ein Beweismuster gültig (sound)?

Strategie:

1. **Übersetzen:** Formuliere das Muster als logische Folgerung:

$$(\text{Annahme}_1 \wedge \text{Annahme}_2 \wedge \ldots) \models \text{Schlussfolgerung}$$

2. **Prüfen:** Ist die Folgerung wahr?
   - **Ja** $\rightarrow$ Muster ist **sound**.
   - **Nein** $\rightarrow$ Muster ist **nicht sound** (finde ein Gegenbeispiel).

Beispiel 1: Ungültiges Muster

Muster: Aus $(\neg S \to (T_1 \vee T_2))$ und $(\neg T_1 \vee \neg T_2)$ folgere S.
Logische Folgerung:

$$(\neg A \to (B \vee C)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \models A$$

Gegenbeispiel:

- **Ziel:** Linke Seite wahr, rechte Seite falsch.
- Setze $A = 0$.
- Linke Seite wird zu $(1 \to (B \vee C)) \wedge (\neg B \vee \neg C)$.
- Wähle $B = 0, C = 1$. Die linke Seite wird zu $(1 \to 1) \wedge (1 \vee 0)$, was wahr ist.
- Die rechte Seite ($A = 0$) ist falsch.

Schlussfolgerung: Gegenbeispiel gefunden. Das Muster ist **nicht sound**.

Beispiel 2: Gültiges Muster

Muster: Aus $\neg R$ und $(S \land \neg T) \to R$ folgere $S \to T$.
Logische Folgerung:

$$\neg R \land ((S \land \neg T) \to R) \models S \to T$$

Beweis der Korrektheit: Die linke Seite der Folgerung vereinfacht sich zu $\neg R \land \neg(S \land \neg T)$. Aus dieser Konjunktion folgt trivialerweise der zweite Teil:

$$\neg(S \land \neg T) \equiv S \to T$$

Da aus der linken Seite die rechte Seite folgt, ist die Folgerung gültig.
Schlussfolgerung: Das Beweismuster ist **sound**.

Rückblick: Beweis der Irrationalität von $\sqrt{n}$

Behauptung: Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$: Wenn n keine Quadratzahl ist, dann ist $\sqrt{n}$ irrational.

Beweisstrategie (Widerspruch):

1. **Annahme:** n ist **keine** Quadratzahl **UND** $\sqrt{n}$ ist **rational**.
2. **Definitionen entpacken:**
   - $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ mit ggT$(p, q) = 1$ (vollständig gekürzt).
   - Quadrieren: $n = \frac{p^2}{q^2}$, also $nq^2 = p^2$.

Kernargument (Primfaktorzerlegung)

3. **Primfaktorzerlegung einführen:**
   - Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben.
   - Für eine Zahl k bezeichnet $v_r(k)$ den Exponenten des Primfaktors r in dieser Zerlegung.
   - Beispiel: $72 = 2^3 \cdot 3^2$, also $v_2(72) = 3$, $v_3(72) = 2$.
   - Für Quadrate gilt: $v_r(k^2) = 2 \cdot v_r(k)$, also sind alle Exponenten gerade.
4. **Anwendung auf die Gleichung:**
   - Aus $nq^2 = p^2$ folgt für jeden Primfaktor r:

     $$v_r(n) + v_r(q^2) = v_r(p^2)$$

   - Da q^2 und p^2 Quadrate sind: $v_r(q^2) = 2 \cdot v_r(q)$, $v_r(p^2) = 2 \cdot v_r(p)$.
   - Also: $v_r(n) + 2 \cdot v_r(q) = 2 \cdot v_r(p)$
   - Umformen: $v_r(n) = 2 \cdot (v_r(p) - v_r(q))$

5. **Konsequenz:**
   - Der rechte Ausdruck ist gerade, also muss $v_r(n)$ für jeden Primfaktor r gerade sein.
   - Das bedeutet, n ist eine Quadratzahl.
6. **Widerspruch:** Dies widerspricht unserer Annahme, dass n keine Quadratzahl ist.

Takeaway: Viele Beweise erfordern Wissen aus anderen Gebieten (hier: Zahlentheorie). Für eine detaillierte Erklärung siehe die Präsentationsfolien von letzter Woche. Mit der Mengenlehre bekommt ihr jetzt ein neues, mächtiges Werkzeug.

Chapter 2 Cheatsheet

DM Cheatsheet - Logic & Proofs - Shivram Sambhus (Group K, HS25)

1 Introduction: The Structure of Mathematical Reasoning

This document provides a structured overview of the core tools for formal reasoning in discrete mathematics: propositional logic, predicate logic, and standard proof techniques. The goal is to present a clear, procedural approach to constructing and analyzing mathematical arguments.

1.1 TOC

2 Part I: Propositional Logic (Aussagenlogik)

Propositional logic is the foundation of mathematical reasoning. It deals with propositions (statements that are either true or false) and the logical connectives that combine them.

2.1 Propositions and Connectives

Core Concepts

A **proposition** is a declarative sentence with a definite truth value (True/1 or False/0).

Connective	Symbol	Meaning
Negation	$\neg P$	"it is not the case that P
Conjunction	$P \wedge Q$	"P and Q are both true
Disjunction	$P \vee Q$	"at least one of P or Q is true
Implication	$P \to Q$	"if P is true, then Q is true
Biconditional	$P \leftrightarrow Q$	"P and Q have the same truth value

2.2 Truth Tables and Logical Status

Procedure: Constructing a Truth Table

1. Create a column for each atomic proposition (n variables).
2. Create 2^n rows to list all possible combinations of truth values.
3. Add columns for complex sub-formulas, building up from simplest to most complex.
4. Fill each new column by applying the definition of its main connective to its constituent columns.

Example: Truth Table for $(P \vee Q) \to (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \to (P \wedge Q)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Definitions of Logical Status

- **Tautology:** A formula that is always true (final column is all 1s). E.g., $P \vee \neg P$.
- **Contradiction:** A formula that is always false (final column is all 0s). E.g., $P \wedge \neg P$.
- **Contingency:** A formula that is neither a tautology nor a contradiction.
- **Satisfiable:** A formula that is true for at least one assignment of truth values (i.e., not a contradiction).

2.3 Logical Equivalences

Concept

Two formulas F and G are **logically equivalent** ($F \equiv G$) if they have identical truth tables. This means $F \equiv G$ is a tautology. Equivalences are the rules for algebraic manipulation of logical formulas.

Fundamental Laws

- **De Morgan's Laws:** $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$ $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$
- **Distributive Laws:** $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- **Implication Equivalence:** $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
- **Contrapositive:** $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$
- **Biconditional Equivalence:** $P \equiv Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
- **Double Negation:** $\neg(\neg P) \equiv P$

TA Tip: The Implication Pitfall

The expression $P \to Q$ is only false when a true premise leads to a false conclusion ($T \to F$). If the premise P is false, the implication is **vacuously true**. This is a common source of confusion but is essential for mathematical reasoning.

3 Part II: Predicate Logic (Prädikatenlogik)

Predicate logic extends propositional logic by introducing variables, predicates, and quantifiers, allowing for statements about properties of objects and relationships between them.

3.1 Predicates and Quantifiers

- **Universe of Discourse ($\mathbb{U}$):** The non-empty set of objects that variables can represent (e.g., integers, people, all cats).
- **Predicate:** A property that becomes a proposition when its variables are assigned values from the UoD. E.g., $P(x) = x > 3$.
- **Universal Quantifier ($\forall$):** "For all". $\forall x, P(x)$ is true if $P(x)$ is true for every x in the UoD.
- **Existential Quantifier ($\exists$):** "There exists". $\exists x, P(x)$ is true if there is at least one x in the UoD for which $P(x)$ is true.

3.2 Nested Quantifiers

Procedure for Interpretation

1. Read from left to right. The order is critical.
2. The choice for a variable bound by an inner quantifier can depend on the variables of the outer quantifiers.
3. Think of it as a nested loop or a challenge-response game: $\forall x$ means "for any x an opponent gives you...", $\exists y$ means "...you can find a y such that...".

Simple Example

UoD = Integers.

- $\forall x \exists y, x < y$: "For every integer, there is a larger integer." (True, choose $y = x + 1$).
- $\exists y \forall x, x < y$: "There exists an integer that is larger than all integers." (False, no maximum integer exists).

Harder Example

UoD = People. $L(x, y) = x$ loves y.

- $\forall x \exists y, L(x, y)$: "Everybody loves somebody." (The person loved can be different for each individual).
- $\exists y \forall x, L(x, y)$: "There is somebody who is loved by everybody." (A single, universally loved person exists).

3.3 Negating Quantified Statements

Procedure (De Morgan's for Quantifiers)

1. Place a $\neg$ in front of the entire quantified statement.
2. "Push" the $\neg$ inward across each quantifier one by one.
3. Each time the $\neg$ passes a quantifier, the quantifier flips ($\forall$ becomes $\exists$, and vice versa).
4. Once inside, apply standard propositional De Morgan's laws to the predicate expression.

Simple Example

$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$

$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$

Harder Example

Statement: "All students who studied passed the exam." $\forall x((S(x) \wedge T(x)) \to P(x))$

Negation Procedure:

1. $\neg(\forall x((S(x) \wedge T(x)) \to P(x)))$
2. $\equiv \exists x \neg((S(x) \wedge T(x)) \to P(x))$ (Flip $\forall$, push $\neg$ in)
3. $\equiv \exists x \neg(\neg(S(x) \wedge T(x)) \vee P(x)))$ (Implication law)
4. $\equiv \exists x(S(x) \wedge T(x)) \wedge \neg P(x))$ (De Morgan's & Double Negation)

Meaning: "There exists someone who is a student, studied, and did not pass."

Mengenlehre

Mengen und Elemente

- **Menge:** Eine *ungeordnete* Sammlung von **eindeutigen** Elementen.
  - Beispiel: $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 1, 2, 3\}$
- Reihenfolge und Mehrfachnennung spielen keine Rolle.
- **Element einer Menge ($\in$):**
  $x \in A$ bedeutet, dass x ein Element der Menge A ist.
  $x \notin A$ bedeutet, dass x **nicht** zu A gehört.

  Achtung: x und $\{x\}$ sind *nicht* dasselbe.
  - x ist ein Objekt.
  - $\{x\}$ ist eine Menge, die genau dieses Objekt enthält.
- **Leere Menge ($\emptyset$ oder $\{\}$):**
  Die Menge, die **kein** Element enthält.
  - Formal: $\forall x \ (x \notin \emptyset)$.

Teilmengen

- **Teilmenge ($\subseteq$):**
  A ist eine Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

  $$A \subseteq B \iff \forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B)$$

  Beispiel:
  $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, da jedes Element der linken Menge auch in der rechten enthalten ist.

  Sanity Check:
  $\emptyset \subseteq A$ gilt **immer**, denn die Bedingung
  "$x \in \emptyset \rightarrow x \in A$" ist für jedes x wahr
  (weil die Voraussetzung $x \in \emptyset$ nie erfüllt ist).

Gleichheit

- **Gleichheit von Mengen ($=$):**
  Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie **dieselben Elemente** enthalten.

$$A = B \iff (A \subseteq B \land B \subseteq A)$$

- Diese Definition ist **fundamental**: Gleichheit wird über Teilmengenbeziehung definiert.

Vereinigung und Schnittmenge

- **Vereinigung ($A \cup B$):**
  Enthält alle Elemente, die in A oder B oder in beiden sind.

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- **Schnittmenge ($A \cap B$):**
  Enthält alle Elemente, die **in beiden** Mengen vorkommen.

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Beispiel:
Wenn $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4\}$, dann
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{3\}$

Differenz

- **Differenz ($A \setminus B$):**
  Enthält alle Elemente, die in A, aber **nicht** in B liegen.

  $$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

  Beispiel:
  $\{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\}$

Kardinalität (Mächtigkeit) von Mengen

- **Definition:** Die Kardinalität $|A|$ einer Menge A ist die Anzahl ihrer Elemente.
  - Beispiel: $|\{1, 2, 3\}| = 3$
- Für endliche Mengen zählt man einfach die Elemente.

Beispiel:
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{a, b, c\}| = 3$

Kartesisches Produkt

- **Kartesisches Produkt ($A \times B$):**
  Die Menge aller **geordneten Paare** (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

  $$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

  Wichtig: $(a, b) \neq (b, a)$, falls $a \neq b$.
  Die Reihenfolge der Elemente ist entscheidend.

  Kardinalität:

  $$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

  (falls A und B endlich sind)

Die Potenzmenge

- **Definition:**
  Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge **aller Teilmengen** von A.

$$\mathcal{P}(A) := \{S \mid S \subseteq A\}$$

- Die Elemente von $\mathcal{P}(A)$ sind selbst Mengen.

Beispiel:
Sei $A = \{1, 2\}$, dann

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Eigenschaften der Potenzmenge

Sanity Checks:

- $A \in \mathcal{P}(A)$, weil $A \subseteq A$.
- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, weil $\emptyset \subseteq A$.
- Kardinalität: Wenn $|A| = n$, dann

  $$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

  da jedes Element von A entweder enthalten oder nicht enthalten sein kann.

Beispiel:
Für $A = \{1, 2, 3\}$ gilt

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$$

Argumentation mit Potenzmengen

Um zu zeigen, dass $X \in \mathcal{P}(A)$ gilt,
muss man nach Definition zeigen, dass $X \subseteq A$.

Beispiel:
Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $X = \{1, 2\}$.
Dann gilt $X \in \mathcal{P}(A)$,
da jedes Element von X auch in A enthalten ist.

Zusammenfassung

Begriff	Symbol	Definition / Beschreibung
Leere Menge	$\emptyset$	Keine Elemente
Teilmenge	$\subseteq$	$A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \to x \in B)$
Vereinigung	$\cup$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Schnittmenge	$\cap$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Differenz	$\setminus$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Kartesisches Produkt	$\times$	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
Potenzmenge	$\mathcal{P}(A)$	Menge aller Teilmengen von A
Kardinalität	$\|A\|$	Anzahl der Elemente von A

Übungsteil: Mengenlehre

Hinweis: Das Ziel hier ist nicht unbedingt, einen perfekten, formalen Beweis aufzuschreiben. Es geht darum, die **Lösungsstrategie** zu finden und zu verstehen. Eine grobe Skizze des Beweises oder die Kernidee reicht für unsere Diskussion.

Übung 1: Mengenoperationen (Sanity Check)

Behauptung: Für beliebige Mengen A, B, C gilt:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Beweise dies, indem du die Definitionen entpackst.

Lösung 1

Wir müssen zeigen, dass ein Element x genau dann in der linken Menge ist, wenn es auch in der rechten Menge ist.

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\
&\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
&\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\iff x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\
&\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Da die logischen Aussagen äquivalent sind, sind auch die Mengen gleich.

Übung 2: Teilmengenbeweis

Behauptung: Für beliebige Mengen A, B gilt:
$A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

Beweise diese Äquivalenz. (Tipp: Beweise beide Richtungen der Implikation separat).

Lösung 2: Richtung 1

Richtung 1: $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

Wir nehmen an, $A \subseteq B$. Wir müssen $A \cup B = B$ zeigen, also $A \cup B \subseteq B$ und $B \subseteq A \cup B$.

- $B \subseteq A \cup B$ gilt immer per Definition der Vereinigung.
- Zeige $A \cup B \subseteq B$:
  - Sei $x \in A \cup B$. Dann ist $x \in A$ oder $x \in B$.
  - **Fall 1:** $x \in B$. Dann sind wir fertig.
  - **Fall 2:** $x \in A$. Wegen unserer Annahme $A \subseteq B$ folgt, dass auch $x \in B$ sein muss.
  - In beiden Fällen gilt $x \in B$. Also ist $A \cup B \subseteq B$.

Lösung 2: Richtung 2

Richtung 2: $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

Wir nehmen an, $A \cup B = B$. Wir müssen $A \subseteq B$ zeigen.

- Sei $x \in A$.
- Per Definition der Vereinigung ist dann auch $x \in A \cup B$.
- Wegen unserer Annahme $A \cup B = B$ folgt, dass $x \in B$.
- Wir haben gezeigt: $\forall x(x \in A \to x \in B)$, was die Definition von $A \subseteq B$ ist.

Übung 3: Potenzmengen

Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen für beliebige Mengen A, B.

- a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Lösung 3a

- **a)** $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ **ist WAHR.**

Beweis: Sei S eine beliebige Menge.

$$
\begin{aligned}
S \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff S \subseteq (A \cap B) \\
&\iff \forall x(x \in S \to x \in A \cap B) \\
&\iff \forall x(x \in S \to (x \in A \land x \in B)) \\
&\iff \forall x((x \in S \to x \in A) \land (x \in S \to x \in B)) \\
&\iff (\forall x(x \in S \to x \in A)) \land (\forall x(x \in S \to x \in B)) \\
&\iff (S \subseteq A) \land (S \subseteq B) \\
&\iff S \in \mathcal{P}(A) \land S \in \mathcal{P}(B) \\
&\iff S \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)
\end{aligned}
$$

Lösung 3b

- **b)** $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ **ist FALSCH.**

Widerlegung durch Gegenbeispiel:

- Sei $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$.
- **LHS:** $A \cup B = \{1, 2\}$. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
- **RHS:** $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$. $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$.
  $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.
- **Vergleich:** Die Menge $\{1, 2\}$ ist in der LHS, aber nicht in der RHS. Die Mengen sind also nicht gleich.

Sanity Check: Welche Beziehung gilt stattdessen?

- Es gilt immer $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Übung 4: Set-Differenz-Identität

Behauptung: Für beliebige Mengen A, B, C gilt:
$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Beweise dies.

Lösung 4

Wir beweisen die Gleichheit, indem wir zeigen, dass ein Element x genau dann in der linken Menge ist, wenn es auch in der rechten Menge ist.

$$
\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \setminus C &\iff (x \in A \land x \notin B) \land x \notin C \\
&\iff x \in A \land (x \notin B \land x \notin C) \\
&\iff x \in A \land \neg(x \in B \lor x \in C) \\
&\iff x \in A \land x \notin (B \cup C) \\
&\iff x \in A \setminus (B \cup C)
\end{aligned}
$$

Da die logischen Aussagen äquivalent sind, sind auch die Mengen gleich. Die Behauptung ist **wahr**.

Übung 5: Potenzmengen

Gegeben: $A = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$. **Frage:** Gib alle Elemente von A an.

Herangehensweise: Schritt für Schritt von innen nach aussen arbeiten.

Lösung 5

1. **Innerste Menge:** $X = \{\emptyset\}$.
   - Dies ist eine Menge, die ein einziges Element enthält: die leere Menge.
   - $|X| = 1$.
2. **Erste Potenzmenge:** $Y = \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\{\emptyset\})$.
   - Wir suchen alle Teilmengen von $\{\emptyset\}$.
   - Die Teilmengen sind:
     - Die leere Menge: $\emptyset$.
     - Die Menge selbst: $\{\emptyset\}$.
   - Also ist $Y = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
   - $|Y| = 2^1 = 2$.
3. **Zweite Potenzmenge:** $A = \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.
   - Wir suchen alle Teilmengen von $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
   - Die Teilmengen sind:
     - Die leere Menge: $\emptyset$.
     - Teilmengen mit einem Element: $\{\emptyset\}$ und $\{\{\emptyset\}\}$.
     - Teilmengen mit zwei Elementen: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
   - Also ist $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
   - $|A| = 2^2 = 4$.

Theorie: Relationen

Was ist eine (binäre) Relation?

- **Definition:** Eine Relation R von einer Menge A zu einer Menge B ist einfach eine **Teilmenge des Kartesischen Produkts** $A \times B$.
$$R \subseteq A \times B$$
- **Notation:** Statt $(a, b) \in R$ schreiben wir oft aRb.

Warum sind Relationen wichtig? Sie formalisieren jede Art von Beziehung zwischen Objekten: “ist grösser als”, “ist Freund von”, “ist Elternteil von”, “ist verbunden mit”, etc. Sie sind die Grundlage für Graphen, Datenbanken und vieles mehr.

Relationen als Verallgemeinerung von Funktionen

Eine Funktion $f : A \to B$ kann als eine Menge von Paaren $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ gesehen werden. Dies ist eine Teilmenge von $A \times B$, also ist **jede Funktion auch eine Relation**.

Der Unterschied:

- **Funktion:** Jedes Element $a \in A$ muss mit **genau einem** Element $b \in B$ in Beziehung stehen.
- **Relation:** Keine Einschränkungen. Ein $a \in A$ kann mit **keinem, einem oder mehreren** Elementen in B in Beziehung stehen.

Relationen sind also ein viel allgemeineres Konzept. Sie haben einige schöne **Eigenschaften**, die wir nächste Woche untersuchen werden (Reflexivität, Symmetrie, etc.).

Übung 6: Eigenschaften des Kartesischen Produkts

Frage: Gelten für beliebige Mengen A, B die folgenden Aussagen? Begründe deine Antwort.

a) $A \times B = B \times A$ (Kommutativität)
b) $|A \times B| = |B \times A|$

Lösung 6

a) $A \times B = B \times A$ **ist im Allgemeinen FALSCH.**
- **Gegenbeispiel:** Sei $A = \{1\}, B = \{2\}$.
  - $A \times B = \{(1,2)\}$
  - $B \times A = \{(2,1)\}$
- Da geordnete Paare $(1,2) \neq (2,1)$, sind die Mengen nicht gleich.
- **Wann gilt es?** Die Gleichheit gilt nur, wenn $A = B$, $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

b) $|A \times B| = |B \times A|$ **ist WAHR** (für endliche Mengen).
- **Begründung:** Nach Definition ist $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Da die Multiplikation von Zahlen kommutativ ist, gilt $|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |B \times A|$.

Übung 7: Das Nichts-Produkt

Frage: Was ist das Ergebnis von $A \times \emptyset$ für eine beliebige Menge A?

Lösung 7

Antwort: $A \times \emptyset = \emptyset$.

Begründung:

- Das Kartesische Produkt $A \times B$ enthält alle Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.
- Wenn $B = \emptyset$, gibt es keine Elemente b, die in B sein könnten.
- Daher kann kein Paar (a, b) gebildet werden.
- Die resultierende Menge ist die leere Menge.

$$A \times \emptyset = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in \emptyset\} = \emptyset$$

Übung 8: Relationen als Mengen von Paaren

Gegeben: Die Menge $A = \{1, 2, 3\}$.

Frage: Gib die folgenden Relationen auf A (also Teilmengen von $A \times A$) explizit als Menge von Paaren an.

a) Die Relation $R_<$ ("kleiner als").
b) Die Relation $R_|$ ("teilt").
c) Die Identitätsrelation id_A.

Lösung 8

Das Kartesische Produkt $A \times A$ hat $3 \cdot 3 = 9$ Elemente:
$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

a) $R_<$ **("kleiner als"):** Wir suchen alle Paare (a, b) mit $a < b$.
$R_< = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

b) $R_|$ **("teilt"):** Wir suchen alle Paare (a, b), wo a ein Teiler von b ist. $R_| = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

c) id_A **(Identität):** Wir suchen alle Paare (a, a).
$id_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

Vorschau auf nächste Woche

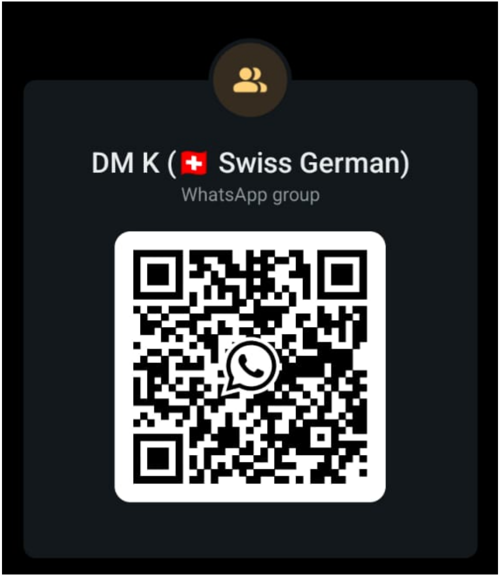
Thema: Eigenschaften von Relationen & spezielle Relationen

- **Eigenschaften:** Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität.
- **Komposition von Relationen:** Wie verknüpft man Relationen?
- **Äquivalenzrelationen:** Formalisieren das Konzept der "Gleichartigkeit".
- **Partielle Ordnungen (Posets):** Formalisieren "kleiner/grösser oder gleich".

Tipps für diese Woche

- **Lest das Skript:** Besonders Kapitel 3. Die Definitionen sind die Grundlage für alles Weitere.
- **Macht alle Übungen:** Bei Mengenlehre und Relationen hilft nur Übung, um die Abstraktion zu meistern.
- **Externe Ressourcen:** Auf meiner Webseite findet ihr Links zu guten YouTube-Playlists (z.B. von "Neso Academy"), die diese Konzepte visuell erklären.

Schöne Woche und bis nächsten Montag!


DM K (🇨🇭 Swiss German)
WhatsApp group

Offene Fragen & Feedback

- Gibt es noch Fragen zu den heutigen Themen oder den Übungen?
- Habt ihr Feedback zur heutigen Übungsstunde? (https://forms.gle/LPrQfoZNsAHVeKoM9)
- Fragen? Schreibt mir eine E-Mail (dm@shivi.io) oder fragt auf WhatsApp/Discord!
- Alle Infos: https://dm.shivi.io/

Schöne Woche und bis nächsten Montag!