# Diskrete Mathematik

Woche 1 - Shivram Sambhus (cs.shivi.io) - LFW B 2

# Heutige Agenda

1. Einführung
2. Über mich & euch
3. Organisation der Übungsstunde
4. Kursübersicht
5. Theorie-Wiederholung

# Über mich

*Hey, ich bin Shivram (Spitzname: Shivi)*

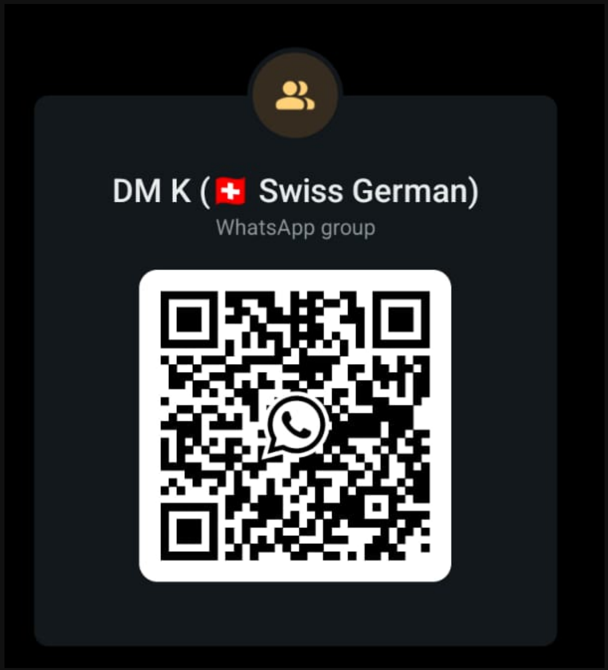
- Geboren in Indien
- Aufgewachsen im Baselland (Therwil)
- Gymi → Militär → ETH Zürich (3. Semester CS)
- Hobbys: Programmieren, Mathe, Skifahren, Badminton, Musikproduktion, ...

# Über euch

- Wer seid ihr?
- Woher kommt ihr?
- Warum habt ihr euch für ein Informatik/CSE-Studium entschieden?

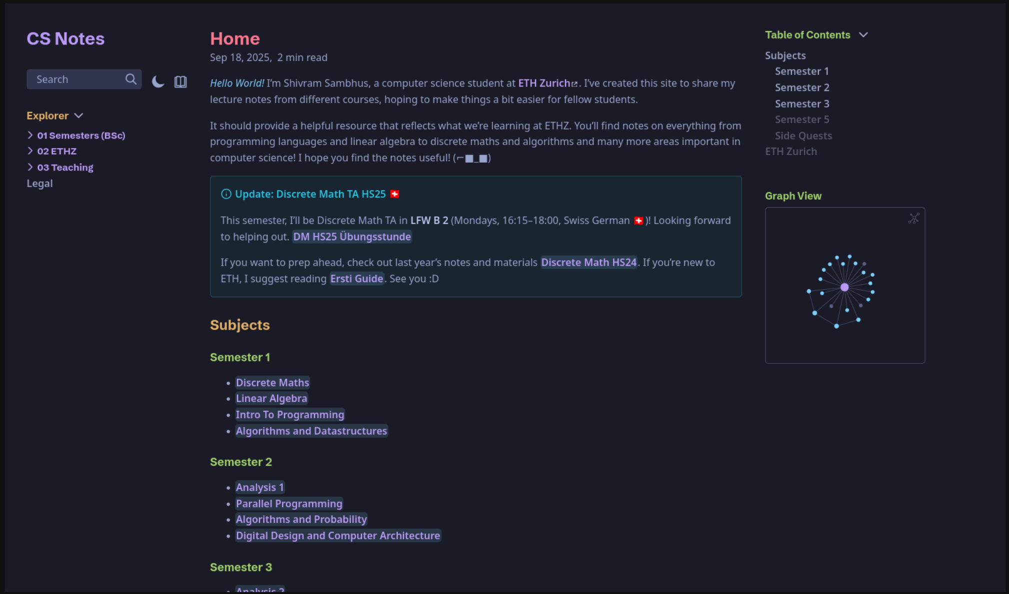
# Übungsstunde

- Montags 16:15 – 18:00, **LFW B 2**
- E-Mail: **dm@shivi.io** | Whatsapp: (siehe Nummer im Chat)
- Discord: discord.gg/gHNCwhxD | Username: **_starboy99_**
- Admin: dm25-team@lists.inf.ethz.ch
- (Anon) Feedback/Suggestions: https://forms.gle/LPrQfoZNsAHVeKoM9
- **Jederzeit Fragen stellen!**



# Materialien

- Quick Links: dm.shivi.io
- Meine Webseite: cs.shivi.io




- Übungen (unvollständig): discmath.ch
- Digitales Skript: manuelmeister.github.io/dm
- Alte Prüfungen: https://exams.vis.ethz.ch/category/DiskreteMathematik
- PVW Scripts VIS

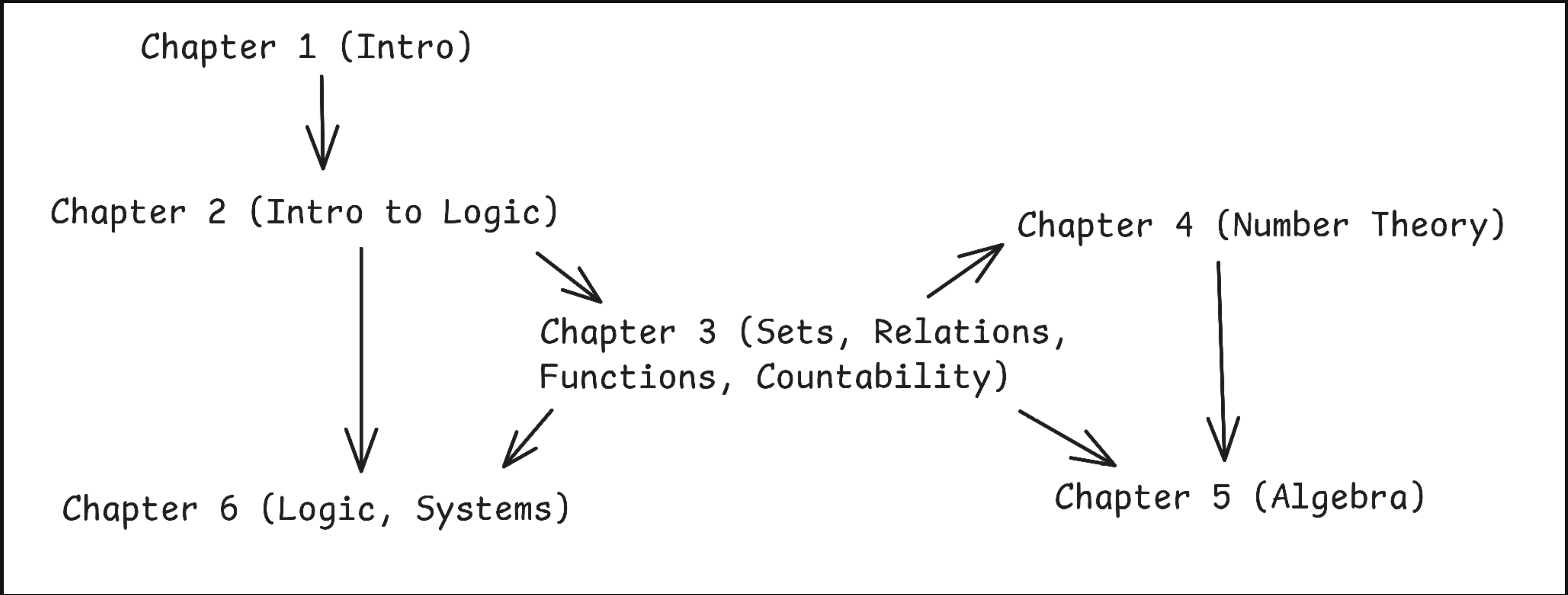
# Abgaben

- Die Serien enthalten normale + Bonusübungen
- Bonus → max. **+0.25 Notenbonus**
- Die zwei schlechtesten Serien werden gestrichen
- Abgabe auf Moodle (oder per E-Mail, falls Moodle nicht funktioniert)
- **Keine verspäteten Abgaben**

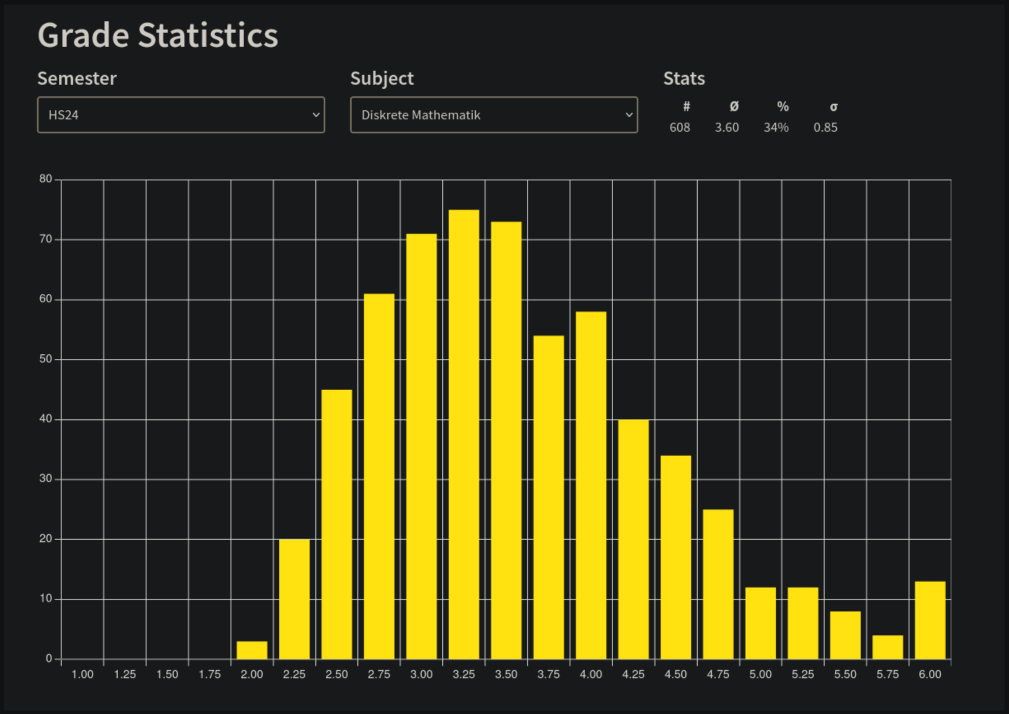
*Studierende, die die Bonus- und Normalübungen machen, schneiden in der Prüfung tendenziell besser ab.*

# Kursübersicht

- Logik und Beweise
- Mengen, Relationen und Funktionen
- Zahlentheorie und Abstrakte Algebra



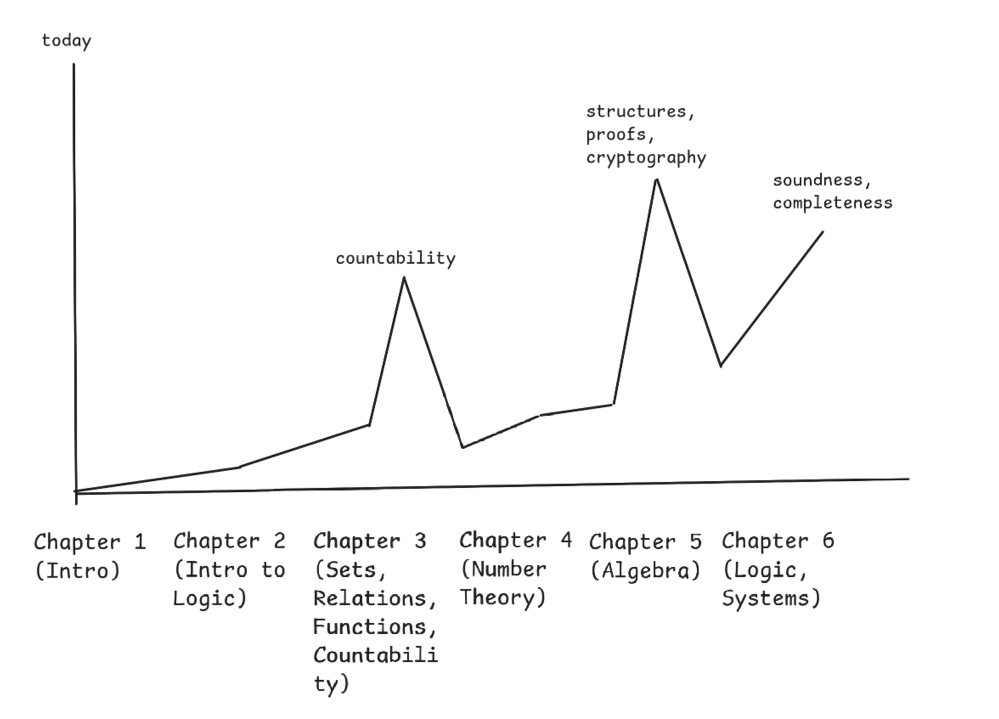
# Dieser Kurs ist nicht einfach...




*Aber er ist sehr lohnend, wenn man sich anstrengt.*

- Schwierigkeiten sind normal
- Mit konstanter Anstrengung → Erfolg

# Wahrgenommener Schwierigkeitsgrad




- Zuerst einfach, wird schnell schwieriger
- Bleibt den Vorlesungen voraus
    - Vorlesungen vergangener Jahre
    - Vorlesungsnotizen (cs.shivi.io)

# Allgemeine Tipps

- Lest das Skript (mindestens einmal)
- Geht nicht weiter, bis ihr den aktuellen Abschnitt verstanden habt
- Macht die Übungen → Feedback-Schleife
- Schaut nicht zu früh in die Lösungen
- Nutzt KI zum Lernen, nicht um für euch zu lösen
- Nutzt zusätzliche Ressourcen → verschiedene Perspektiven helfen
- Fragt mich nach **Konzepten, nicht nach direkten Lösungen**

# Ablauf der Übungsstunde

**Total:** 2h (~90 min aktiv)

- Teil 1:
  - 30 min Theorie-Wiederholung
  - 15 min Beispiele
- 10 min Pause
- Teil 2:
  - 35 min Übungen + Kahoot
  - 10 min Vorschau auf nächste Woche

# Theorie-Wiederholung

# Mathematische Aussagen

Eine **mathematische Aussage** ist eine Behauptung, die **eindeutig** und **objektiv** wahr oder falsch ist.

- **Definitiver Wahrheitswert:** Immer `wahr` oder `falsch`, ohne Mehrdeutigkeit.
- **Objektiv:** Keine Meinungssache.
- **Statisch:** Der Wahrheitswert ändert sich nicht.

Der Wahrheitswert kann unbekannt sein (z.B. eine Vermutung), aber er muss existieren.

# Aussage oder nicht? – Beispiele

- "Wie spät ist es?"
- "Dieser Satz ist falsch."
- "$x > 5$"
- "Es existiert die grösste Primzahl."

# Aussage oder nicht? – Beispiele

- "Wie spät ist es?"
    - ❌ **Frage**, keine Behauptung.
- "Dieser Satz ist falsch."
- "x > 5"
- "Es existiert die grösste Primzahl."

# Aussage oder nicht? – Beispiele

- "Wie spät ist es?"
    - ❌ **Frage**, keine Behauptung.
- "Dieser Satz ist falsch."
    - ❌ **Paradoxon**, kein konsistenter Wahrheitswert möglich.
- "x > 5"
- "Es existiert die grösste Primzahl."

# Aussage oder nicht? – Beispiele

- "Wie spät ist es?"
  - ❌ **Frage**, keine Behauptung.
- "Dieser Satz ist falsch."
  - ❌ **Paradoxon**, kein konsistenter Wahrheitswert möglich.
- "x > 5"
  - ❌ **Prädikat** (offene Aussage), da der Wert von der freien Variable x abhängt.
- "Es existiert die grösste Primzahl."

# Aussage oder nicht? – Beispiele

- "Wie spät ist es?"
    - ❌ **Frage**, keine Behauptung.
- "Dieser Satz ist falsch."
    - ❌ **Paradoxon**, kein konsistenter Wahrheitswert möglich.
- "x > 5"
    - ❌ **Prädikat** (offene Aussage), da der Wert von der freien Variable x abhängt.
- "Es existiert die grösste Primzahl."
    - ✅ **Gültige Aussage**. Sie ist beweisbar falsch, hat aber einen definitiven Wahrheitswert.

# Die Implikation ($A \Rightarrow B$)

Formalisiert die "Wenn A, dann B"-Beziehung.

**Beispiel:** "Wenn ich dich unterrichte ($A$), bestehst du die Prüfung ($B$)."

1. Ich unterrichte, du bestehst. ($A, B$ wahr) $\rightarrow$ Versprechen gehalten. **Implikation ist wahr.**
2. Ich unterrichte, du fällst durch. ($A$ wahr, $B$ falsch) $\rightarrow$ Versprechen gebrochen. **Implikation ist falsch.**
3. Ich unterrichte nicht, du bestehst. ($A$ falsch, $B$ wahr) $\rightarrow$ Kein Versprechen gebrochen. **Implikation ist wahr.**
4. Ich unterrichte nicht, du fällst durch. ($A, B$ falsch) $\rightarrow$ Kein Versprechen gebrochen. **Implikation ist wahr.**

# Implikation: Wahrheitstabelle & Kernaussage

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | F |
| F | W | W |
| F | F | W |

**Zentrale Regel:** Eine Implikation ist **nur dann falsch**, wenn die Prämisse ($A$) wahr und die Konklusion ($B$) falsch ist.

Wenn die Prämisse ($A$) falsch ist, ist die Implikation **immer wahr**.
"Aus Falschem folgt Beliebiges." (Ex falso quodlibet)

# Logik vs. Kausalität

**Wichtig:** $A \Rightarrow B$ bedeutet **nicht**, dass $A$ die Ursache für $B$ ist. Es ist eine rein mechanische Verknüpfung von Wahrheitswerten.

**Beispiel (wahre Aussage):** "Wenn der Mond aus Käse ist ($F$), dann ist $2 + 2 = 4$ ($W$)." Da die Prämisse falsch ist, ist die Implikation wahr.

**Tipp:** Betrachtet die Implikation mechanisch. Nach ein paar Wochen Übung wird es zur zweiten Natur.

# Implikationsketten & Arten von Aussagen

**Implikationsketten** sind das Rückgrat von Beweisen. Wenn $A$ wahr ist und wir zeigen: $A \Rightarrow S_1 \Rightarrow S_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$ dann haben wir bewiesen, dass auch $B$ wahr sein muss.

**Arten von wahren Aussagen:**

- **Satz (Theorem):** Wichtiges, bewiesenes Resultat.
- **Lemma:** Hilfssatz zum Beweis eines Theorems.
- **Korollar:** Direkte Folgerung aus einem Satz/Lemma.
- **Vermutung (Conjecture):** Unbewiesene Aussage, die als wahr angenommen wird.

# Gleichheit (=) vs. Äquivalenz (≡)

- **Gleichheit (=):** Zwei Objekte sind **identisch**.
- **Äquivalenz (≡):** Zwei Ausdrücke liefern für **alle Belegungen** der Variablen denselben Wert.

Die Ausdrücke $(a+b)^2$ und $a+2ab+b^2$ sind verschieden, aber äquivalent. Die korrektere Schreibweise ist daher: $(a+b) \equiv a+2ab+b$

# Aussagenlogik: Die Bausteine

- **Boolesche Werte:** `0` (falsch) und 1 (wahr).
- **Boolesche Variablen:** Platzhalter wie $A, B, C$, die `0` oder 1 sein können. (Alleine keine Aussage!)
- **Operatoren:** Verknüpfen Variablen zu komplexeren Ausdrücken (Formeln).

# Logische Operatoren

| Operator | Name | Bedeutung |
| --- | --- | --- |
| $\neg A$ | Negation | Kehrt den Wahrheitswert von $A$ um. |
| $A \vee B$ | Disjunktion (ODER) | Wahr, wenn $A$ oder $B$ (oder beide) wahr sind. |
| $A \wedge B$ | Konjunktion (UND) | Wahr, nur wenn $A$ und $B$ beide wahr sind. |

# Die Implikation formal

Die Wahrheitstabelle von $A \rightarrow B$ ist identisch mit der von $\neg A \vee B$.

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ | $\neg A \vee B$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Daher gilt die wichtige Äquivalenz: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ "$A$ impliziert $B$" ist dasselbe wie "A ist falsch oder B ist wahr".

# Tautologie, Unerfüllbarkeit und Formeln

- **Tautologie (⊤):** Eine Formel, die **immer wahr** ist, egal welche Werte die Variablen haben.
  - Beispiel: $A \lor \neg A$
- **Unerfüllbar (⊥):** Eine Formel, die **immer falsch** ist.
  - Beispiel: $A \land \neg A$

Wichtig: Eine Tautologie oder eine unerfüllbare Formel ist für sich allein **keine Aussage**. Es ist eine Eigenschaft einer Formel.

# Der Unterschied: Aussage vs. Formel

| Eigenschaft | Aussage | Formel |
|---|---|---|
| **Natur** | Statisch | Dynamisch |
| **Wahrheitswert** | Fest (wahr/falsch) | Hängt von Variablen ab |
| **Beispiel** | "Es gibt unendlich viele Primzahlen." | $A \wedge (B \vee C)$ |

# Wann wird eine Formel zur Aussage?

Eine Formel wird zu einer Aussage, wenn...

- **...alle ihre Variablen belegt sind.**
    - Beispiel: Für $A = 1, B = 0$ wird die Formel $A \land B$ zur **falschen Aussage**.
- **...man eine Behauptung *über* die Formel aufstellt.**
    - Beispiel: "$A \land B \equiv B \land A$" (ist eine wahre Aussage).
    - Beispiel: "$A \models A \lor B$" (ist eine wahre Aussage).
    - Beispiel: "$A \land B$ ist eine Tautologie" (ist eine falsche Aussage).

# Übungen

# Zusammenfassung der heutigen Lektion

- **Aussage vs. Formel:** Aussagen haben einen festen Wahrheitswert, Formeln sind dynamisch.
- **Implikation ($A \Rightarrow B$):** Nur falsch, wenn $A$ wahr und $B$ falsch ist. Nicht mit Kausalität verwechseln!
- **Logische Äquivalenz ($A \equiv B$):** Zwei Formeln haben für alle Belegungen dieselbe Wahrheitstabelle.
- **Wichtige Äquivalenz:** $A \to B \equiv \neg A \vee B$.

# Vorschau auf nächste Woche

**Thema:** Prädikatenlogik und Beweistechniken

- **Aussagen über Formeln**
- **Quantoren:** "Für alle" ($\forall$) und "Es existiert" ($\exists$).
- **Beweismethoden:**
  - Direkter Beweis
  - Indirekter Beweis (Kontraposition)
  - Beweis durch Widerspruch
- **Tipp:** Lest Kapitel 2.1 bis 2.5 im Skript vor – es wird euch sehr helfen!

# Offene Fragen & Feedback

- Gibt es noch Fragen zu den heutigen Themen oder den Übungen?
- Habt ihr Feedback zur heutigen Übungsstunde? (Tempo, Inhalt, etc.) (https://forms.gle/LPrQfoZNsAHVeKoM9)
- Fragen? Schreibt mir eine E-Mail (dm@shivi.io) oder fragt auf Discord!
- Alle Infos: https://dm.shivi.io/

**Schöne Woche und bis nächsten Montag!**